Резюме миникурсов и докладов

Юрий Белов "Геометрия экспоненциальных систем"

Один из важных типов сигналов (функций), возникающих в приложениях - сигналы с конечной энергией и ограниченным спектром.

Другими словами, это преобразования Фурье квадратично-суммируемых функций на интервале (такие функции образуют пространство Пэли-Винера). Системы из экспонент $e_\mu:=exp(i\mu t)$ наиболее интересны для изучения как с физической, так и с математической точки зрения. Один из наиболее естественных вопросов - как по измерениям сигнала f в некоторой дискретной последовательности точек (то есть по данным $(\hat{f}, e_\mu)$) восстановить его полностью.

Различные способы формализовать свойство восстановления приводят к математически строгим определениям соответствующих свойств систем векторов (базисы Рисса, M-базисы, базисы суммирования, фреймы и т.д.). Для некоторых из них существует полное описание систем из экспонент, удовлетворяющих данному свойству. Например, в 1981 году Павлов Хрущев и Никольский описали все базисы Рисса из экспонент. Для других свойств есть только частичные результаты (описание фреймов из экспонент, полученное в 2002 году Сейпом и Ортега-Серда).

В курсе будет дан обзор текущего состояния дел в этой области. Также планируется доказать базовые и некоторые современные результаты.

Михаил Вербицкий "Аменабельные группы и парадокс Банаха-Тарского"

Пусть G есть группа, действующая на пространстве M. Подмножества Z, Z' в M называются равноразложимым относительно G, если Z можно разрезать на конечное число кусков, подействовать на них G, и сложить из них Z'. Подмножество Z называется G-парадоксальным, если Z можно разрезать на две части, которые обе равноразложимы с Z. Рассмотрим G=M, с обычным (левым) действием G на себе. Группа называется супераменабельной, если у G нет G-парадоксальных подмножеств. Такая группа не может содержать свободной подгруппы. Если какая-то группа G движений пространства M не супераменабельна и действует на M-свободно, в M имеет место парадокс Банаха-Тарского: каждое G-инвариантное подмножество M G-парадоксально. Наоборот, если G супераменабельна, парадокс Банаха-Тарского невозможен.

Аменабельная группа есть группа, на которой есть ненулевая конечно-аддитивная мера, принимающая конечные значения на всех подмножествах, и инвариантная относительно (правого) действия группы на себе. Аменабельные группы суть интересный класс групп, замкнутый относительно взятия расширений, подгрупп, и содержащий все конечные и все абелевы группы; супераменабельность влечет аменабельность.

Я докажу, что на плоскости (с группой евклидовых движений) имеет место парадокс Банаха-Тарского (теорема Серпинского-Мазуркевича), и расскажу о классификации конечно-порожденных аменабельных подгрупп в GL(n).

Юрий Давыдов "Устойчивые законы, точечные процессы и случайные выпуклые множества"

Устойчивые законы возникают естественным образом в самых различных задачах и составляют важнейший класс вероятностных распределений. В последнее время была осознана глубокая связь между этим классом и точечными процессами, которые часто являются базовым элементом при построении моделей статистической физики (случайные мозаики, случайные графы, задачи перколяции,...).

В предлагаемом мини-курсе будет рассказано об этой связи, об обобщении понятия устойчивости на случайные элементы абстрактных выпуклых конусов и о приложениях к изучению асимптотического поведения случайных зонотопов.

М. Дубашинский "Теорема Рунге для гармонических дифференциальных форм в старших размерностях"

Согласно классической теореме Рунге, любая функция, аналитическая вблизи компактного множества $K\subset\mathbb{C}$, может быть равномерно на K приближена рациональными функциями с полюсами вне K.

В докладе будет дан обзор ряда результатов (В.П.~Хавин, А.~Преса~Саге, Е.В.~Малинникова) об одном многомерном обобщении комплексной теоремы Рунге. Роль аналитических функций играют \emph{гармонические} (то есть замкнутые и козамкнутые) дифференциальные формы в $\mathbb R^n$.
Аналогами рациональных функций в старших размерностях оказываются \emph{элементарные формы} -- потенциалы, порождаемые циклами.

Приближая произвольную форму элементарными, мы, как и в классическом случае, имеем значительную свободу в выборе циклов, порождающих элементарные формы. Эта свобода, однако, не безгранична: набор циклов должен быть достаточен в гомологическом смысле. Кроме того, неизбежным оказывается применение элементарных форм с неточечными особенностями. С этим связан эффект нелокальности в многомерных задачах приближения гармоническими формами.

Антон Зорич "Бильярды в рациональных многоугольниках, пространства плоских поверхностей и ренормализация"

Я постараюсь рассказать, как за динамикой бильярда в многоугольнике кроется динамика в пространстве плоских
поверхностей. Цель этих двух лекций - дать общее представление об области и рассказать, какие динамические, геометрические, комбинаторные, и аналитические объекты в ней возникают.

Ни знания динамики, ни умение играть в бильярд не предполагаются.

Сергей Иванов "Высшие пределы и теории гомологий"

В 1989 году Квиллен доказал, что 2n-ые циклические гомологии алгебры над полем характеристики 0 могут быть представлены, как пределы некоторых простых функторов из категории копредставлений алгебры в категорию абелевых групп. Позднее Р.Михайловым вместе с соавторами было доказано, что аналогичные представления имеются для 2n-ых гомологий группы и для самых старших ненулевых производных функторов тензорной, внешней и разделенной степени. Доклад будет посвящен тому, как могут быть описаны вышеуказанные теории гомологий, используя производные функторы предела, уже для всех случаев, включая нечетные гомологии (Циклические и Хохшильдовы гомологии алгебры, гомологии группы ...) и все производные функторы по Дольду-Пуппе тензорной, внешней и симметрической степени.

Максим Казарян "Математическая физика чисел Гурвица"

Числа Гурвица перечисляют разветвленные накрытия сферы Римана. По другому, эти числа могут быть выражены в терминах комбинаторики группы перестановок: они описывают количества всевозможных разложений заданной перестановки в виде произведения транспозиций. Оказывается, что производящая функция для этих чисел удовлетворяет большому количеству соотношений, записываемых в виде дифференциальных уравнений в частных производных: иерархии КП, урвнениям Вирасоровского типа, топологической рекурсии Чехова-Эйнара-Орантена и другим. Лишь малая часть этих соотношений может быть выведена из элементарной комбинаторики группы перестановок. Большая же их часть вытекает из нетривиальной связи с пространствами модулей кривых, инвариантами Громова-Виттена, матричными моделями, интегрируемыми системами и другими теориями, часто относимыми к области математической физики. Обсуждаемая в лекциях теория Гурвица может рассматриваться, таким образом, как элементарная модель для упомянутых физических теорий, в которой все вычисления могут быть доведены до явных ответов, а все утверждаемые равенства могут быть проверены при помощи численных компьютерных экспериментов.

Федор Петров "Полиномиальные тождества

В 1962 году Фримэн Дайсон предложил заменить классическую модель случайных матриц Вигнера на так называемые круговые ансамбли. Изучение совместных распределений их собственных значений привело его к следующей гипотезе о свободном члене многочлене Лорана $\prod_{i\ne jj} (1-x_i/x_j)^{a_i}$: он равен мультиномиальному коэффициенту $(\sum a_i)!/\prod a_i!$. Гипотеза Дайсона была доказана почти сразу независимо Гунсоном и Вилсоном с помощью многомерного комплексного анализа. Хитрое элементарное доказательство было предложено Гудом. Впоследствии гипотеза Дайсона обобщалась в различных направлениях --- с одной стороны, Моррисом, Аомото, Форрестер и др. формулировали утверждения о свободных коэффициентах других многочленов Лорана. Стэнли предложил q-версию тождества Дайсона, доказательство которой Зейлбергером и Брессу было получено спустя 10 лет после формулировки и впоследствии несколько раз упрощалось. Мы расскажем о подходе к таким тождествам с помощью явной формы комбинаторной теоремы о нулях Н. Алона. Этот подход позволил существенно упростить доказательства известных результатов и получить ряд новых. Доклад основан на совместных работах с Р. Карасевым, В. Волковым, З, Надем и Д. Кароли.

Гаянэ Панина "Пермутоэдр, ассоциоэдр, и др."

Я расскажу о знаменитых многогранниках (о пермутоэдре, ассоциоэдре, стеллоэдре и их обобщениях), вписав их в контекст

(1) "secondary polytope" Гельфанда-Капранова-Зелевинского, и

(2) конструкции нестоэдров, в том числе граф-ассоциоэдров (Feichtner, Постников, Sturmfels, Зелевинский).