Тема доклада: Обобщенные интегралы и граничные значения интегралов типа Коши.

Докладчик: Алиев Рашид Авязага оглы, Бакинский Государственный Университет.

А Н Н О Т А Ц И Я

Пусть Γ – простой замкнутый ляпуновский контур, на котором задана конечная комплексная мера ν, G^{+} – ограниченная и G^{-} – неограниченная области с границей Γ. Функции

$$F^{+}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d\nu(\tau)}{\tau-z},\quad z\in G^{+},\text{ и } F^{-}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d\nu(\tau)}{\tau-z},\quad z\in G^{-},$$

называются интегралами типа Коши меры ν по контуру Γ.

Из теоремы А.Зигмунда следует, что если мера ν абсолютно непрерывна и его производная f принадлежит классу $L\log L(\Gamma)$, то $F^{+}(z)\in H_1(G^{+})$ и, поэтому, интеграл типа Коши является интегралом Коши. Если же $f\in L(\Gamma)$, но $f\notin L\log L(\Gamma)$, то может оказаться, что граничные значения $F^{+}(\tau)$ и $F^{-}(\tau)$ не будут интегрируемы на T в смысле Лебега. Поэтому в этом случае интеграл типа Коши не представляется с помощью своих граничных значений в терминах интеграл Лебега.

Пользуясь понятием A-интегрирования, П.Л.Ульянов установил, что интеграл типа Коши абсолютно непрерывной меры является A-интегралом Коши.

В случае, когда мера ν не является абсолютно непрерывной, граничные значения $F^{+}(\tau)$ интеграла типа Коши $F^{+}(z)$ при $z\to\tau\in\Gamma$ не являются A-интегрируемыми. Можно было бы ожидать, что интеграл типа Коши конечной комплексной меры является Q'-интегралом Коши, введенным Э.Титчмаршем. Однако, как следует из результатов автора, для интеграла типа Коши конечной комплексной борелевской меры граничные значения $F^{+}(\tau)$ являются Q'-интегрируемыми на Γ, но интеграл типа Коши конечной комплексной меры не является Q'-интегралом Коши (в силу появления добавочного слагаемого).

А.Б.Александровым установлено, что интеграл типа Коши конечной комплексной борелевской меры, вообще говоря, не становится интегралом Коши, если пользоваться лишь понятием интеграла, значение которого от любой действительной функции также является действительным, и, следовательно, необходимо привлечение к рассмотрению интегралов с комплексными значениями.

Путем добавления к значению Q'-интеграла подходящих слагаемых, мы получаем новые интегралы, названные N^+- и N^--интегралами, которые позволяют представить интегралы типа Коши конечных комплексных борелевских мер по своим граничным значениям, т.е. доказывается, что если конечная комплексная мера ν задана на замкнутом ляпуновском контуре Γ, G^+ – ограниченная и G^- – неограниченная области с границей Γ, то для интегралов типа Коши меры ν имеют место равенства

$$F^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(N^+\right)\int_\Gamma \frac{F^+(\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad z\in G^+,$$

$$F^-(z)=-\frac{1}{2\pi i}\left(N^-\right)\int_\Gamma \frac{F^-(\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad z\in G^-,$$

и моменты граничных значений интегралов типа Коши конечных комплексных мер равны нулю соответственно в смысле N^+- и N^--интеграла.

Отметим, что класс N-интегрируемых функций шире чем класс A-интегрируемых функций, но уже чем класс Q'-интегрируемых функций, N^+- и N^--интегралы обладают свойствами аддитивности и для этих интегралов имеют место формулы замены переменной.

Аналогичные результаты получены и для интегралов типа Коши конечных комплексных мер на полуплоскостях.