Последовательности Бесселя с конечной верхней плотностью в пространствах де Бранжа

Ю.Белов*

23 февраля 2015 г.

Аннотация

Мы опишем все пространства де Бранжа $\mathcal{H}(E)$, в которых любая вещественная бесселева последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность. Описание будет дано в терминах спектральной меры пространства.

1 Введение

Пусть $\mathcal{H}$ – пространство целых функций с воспроизводящим ядром k_λ, $\lambda \in \mathbb{C}$. Будем говорить, что последовательность Λ *бесселева*, если выполнено неравенство

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{|f(\lambda)|^2}{\|k_\lambda\|^2_{\mathcal{H}}} \le C_\Lambda \|f\|^2_{\mathcal{H}}, \quad f \in \mathcal{H}. \tag{1}$$

Одна из классических задач комплексного анализа состоит в поиске описаний бесселевых последовательностей Λ в геометрических терминах. Например, для пространства Пэли-Винера $\mathcal{P}\mathrm{W}_\pi$ (пространство целых функций экспоненциального типа не выше π и квадратичносуммируемых на $\mathbb{R}$) имеет место следующий результат:

Теорема 1.1 *Последовательность $\Lambda \subset \mathbb{R}$ бесселева в пространстве $\mathcal{P}\mathrm{W}_\pi$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \#\{\Lambda \cap [n, n+1]\} < \infty. \tag{2}$$

Достаточность условия (2) следует из неравенства Планшереля-Полиа, а необходимость можно получить, подставив в неравенство (1) функции $k_n(z) = \frac{\sin(\pi(z-n))}{\pi(z-n)}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, для бесселевости Λ *необходима* конечность некоторой *верхней плотности.* Главная цель этой статьи – описать пространства де Бранжа, в которых неравенство типа (2) необходимо для бесселевости вещественной последовательности Λ.

*Работа поддержана грантом РНФ 14-41-00010.

1.1 Пространства де Бранжа

Будем говорить, что E – целая функция класса Эрмита-Билера, если выполнено неравенство

$$|E(z)| > |E(\bar{z})|, \quad z \in \mathbb{C}^+$$

и фунцкия E не обращается в ноль на $\mathbb{R}$. Каждая такая функция порождает пространство *де Бранжа* $\mathcal{H}(E)$, состоящее из целых функций F, таких, что функции F/E и F^*/E $(= \overline{F(\bar{z})}/E(z))$ принадлежат пространству Харди $H^2(\mathbb{C}^+)$. Скалярное произведение в $\mathcal{H}(E)$ задается формулой

$$(F,G)_{\mathcal{H}(E)} := \int_{\mathbb{R}} \frac{F(t)\overline{G(t)}}{|E(t)|^2} dt.$$

Если $E(z) = e^{-i\pi z}$, то $\mathcal{H}(E) = \mathcal{P}\mathrm{W}_\pi$.

Существует несколько других (эквивалентных) определений пространств де Бранжа (см. обсуждение в §2). Теория пространств де Бранжа играет важную роль в гармоническом анализе и спектральной теории дифференциальных операторов второго порядка. Основы этой теории изложнены в книге де Бранжа [7]. Современные результаты теории и ее многочисленных приложений описаны в работах [13, 12] (мы не претендуем на полноту списка).

Хорошо известно, что воспроизводящее ядро в $\mathcal{H}(E)$ задается формулой (см. [7])

$$k_w(z) := \frac{\overline{E(w)}E(z) - \overline{E^*(w)}E^*(z)}{2\pi i(\bar{w} - z)}.$$

Важную роль в теории пространств де Бранжа играет *фазовая функция* φ. Пусть E - функция класса Эрмита-Билера. Будем говорить, что φ - фазовая функция E (или $\mathcal{H}(E)$), если φ - непрерывная возрастающая функция, такая, что $E(t)e^{i\varphi(t)} \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. Ясно, что функция φ определена с точностью до аддитивного слагаемого πl, $l \in \mathbb{Z}$.

В каждом пространстве де Бранжа есть *ортогональный* базис из воспроизводящих ядер.

Теорема 1.2 *([7]) Пусть $\alpha \in \mathbb{T}$, а $t_{\alpha,n}$ (единственное) решение уравнения $\varphi(t_{\alpha,n}) = \frac{1}{2}\arg\alpha + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (мы рассматриваем только те n, для которых решение существует). Тогда система $\{k_{t_{\alpha,n}}\}_n$ - ортогональный базис в $\mathcal{H}(E)$ для всех α, за исключением, быть может, одного.*

Наличие семейства ортогональных базисов из воспроизводящих ядер – характеризирующее свойство пространств де Бранжа. В работе [5] показано, что если в гильбертовом пространстве целых функций с некоторыми естественными свойствами есть два различных ортогональных базиса из воспроизводящих ядер, то это пространство совпадает с некоторым пространством де Бранжа.

В дальнейшем мы будем считать, что $\alpha = 1$ *не является* исключительным значением в теореме 1.2 (т.е. $\{k_{t_{1,n}}\}$ - ортогональный базис).

Если $\mathcal{H}(E) = \mathcal{P}\mathrm{W}_\pi$, то $\varphi(t) = \pi t$, $t_{1,n} = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Функция φ задает метрику на $\mathbb{R}$, $d(x,y) = \varphi(x) - \varphi(y), x \geq y$. Многие свойства пространства $\mathcal{H}(E)$ хорошо описываются в терминах этой метрики (см. [1]). Следующее предположение – естественное обобщение теоремы 1.1 на пространства де Бранжа.

Предположение. *Последовательность* $\Lambda \subset \mathbb{R}$ *бесселева в пространстве* $\mathcal{H}(E)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{UD}(\Lambda) := \sup_{n\in\mathbb{Z}} \#\{\Lambda \cap [\varphi^{-1}(\pi n), \varphi^{-1}(\pi(n+1))]\} < \infty^1. \tag{3}$$

К сожалению, условие (3) не необходимо и не достаточно для бесселевости. Пример небесселевой последовательности, удовлетворяющей условию (3), был построен в [1]. Первый пример бесселевой последовательности с бесконечной верхней плотностью (относительно $t_n = \varphi^{-1}(n)$) был предъявлен в работе [6].

Тем не менее, для многих *классов* пространств условие (3) необходимо. Например, если множество $|E(\bar{z})| < (1-\varepsilon)|E(z)|$ связно для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$, то условие (3) необходимо для бесселевости (см. работу [9], где это свойство проверено для соответствующих пространств $K_\Theta = \mathcal{H}(E)\,/E$). Такие функции E (из класса Эрмита-Билера) и соответствующие им внутренние функции Θ $(= E^*/E)$ называют *однокомпонентными*.

С другой стороны, если последовательность $\{t_n\}_{n>0}$ *лакунарна*, $\inf_n t_{n+1}/t_n > 1$, то условие (3) также необходимо для бесселевости (см. [6]).

В этой статье мы полностью опишем пространства де Бранжа, в которых условие (3) необходимо для бесселевости. Описание будет дано в терминах *спектральной меры* пространства $\mathcal{H}(E)$.

Легко проверить, что для любого α, $|\alpha| = 1$ функция $\Re\frac{\alpha E + E^*}{\alpha E - E^*}$ положительна и гармонична в $\mathbb{C}^+$. Следовательно,

$$\Re\frac{\alpha E(z) + E^*(z)}{\alpha E(z) - E^*(z)} = p_\alpha y + \frac{y}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\alpha(t)}{|t-z|^2}, \quad p_\alpha \geq 0$$

для некоторой меры μ_α такой, что $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\alpha(t)}{1+t^2} < \infty$. Семейство мер μ_α часто называют *мерами Кларка* (см. [8]). Отметим, что $p_\alpha = 0$ для всех α, кроме, быть может, одного (это в точности исключительное значение из теоремы 1.2). Меру $\mu := \mu_1$ мы будем называть спектральной мерой пространства $\mathcal{H}(E)$. В заключение отметим, что $\operatorname{supp}\mu = \{t_n\}$, $\mu = \sum_n \mu_n \delta_{t_n}$, $\sum_n \frac{\mu_n}{1+t_n^2} < \infty$. На самом деле, *любая* мера такого вида - спектральная мера некоторого пространства де Бранжа (см. обсуждение в §2).

[1] Мы неявно предполагаем, что супремум берется по тем индексам n, для которых существует $\varphi^{-1}(n)$

1.2 Основной результат

Для простоты будем считать, что $\{t_n\}$ существует для всех $n \in \mathbb{Z}$. Положим

$$I_n = [t_n, t_{n+1}], \quad I_n^- = [t_n, (t_n + t_{n+1})/2), \quad I_n^+ = [(t_n + t_{n+1})/2, t_{n+1}),$$

$$M_n^-(x) = \mu([t_n - (x - t_n), t_n]), \quad P_n^-(x) = \int_{|y-t_n|>|x-t_n|} \frac{d\mu(y)}{|y - t_n|^2}, \quad x \in I_n^-.$$

$$M_n^+(x) = \mu([t_{n+1}, t_{n+1} + (t_{n+1} - x)]), \quad P_n^+(x) = \int_{|y-t_{n+1}|>|x-t_{n+1}|} \frac{d\mu(y)}{|y - t_{n+1}|^2}, \quad x \in I_n^+.$$

Ясно, что $M_n^-(0) = \mu(\{t_n\}) = \mu_n$, $M_n^+(0) = \mu(\{t_{n+1}\}) = \mu_{n+1}$. Для формулировки основного результата нам понадобится понятие *диадического размера.*

Определение 1.1 *Будем говорить, что положительная последовательность $\{d_n\}$ (конечная или бесконечная) имеет диадический размер m, если она лежит в объединении m диадических ячеек вида $[2^l, 2^{l+1})$, $l \in \mathbb{Z}$ и m - наименьшее число с таким свойством.*

Обозначим диадический размер последовательности $\{d_n\}$ за $\mathcal{D}(\{d_n\})$ (он может быть и бесконечным). Для регулярных последовательностей $\{d_n\}$ имеем $\mathcal{D}(\{d_n\}) = [\log_2 \sup d_n/ \inf d_n] + 1$.

Рассмотрим разбиение вещественной оси на четыре множества

$$\mathbb{R} = \mathcal{R}_M^- \cup \mathcal{R}_M^+ \cup \mathcal{R}_P^- \cup \mathcal{R}_P^+,$$

$$\mathcal{R}_M^- = \{x : x \in I_n^-, M_n^-(x) \geq |x - t_n|^2 P_n^-(x)\},$$
$$\mathcal{R}_M^+ = \{x : x \in I_n^+, M_n^+(x) \geq |x - t_{n+1}|^2 P_n^+(x)\},$$
$$\mathcal{R}_P^- = \{x : x \in I_n^-, M_n^-(x) < |x - t_n|^2 P_n^-(x)\},$$
$$\mathcal{R}_P^+ = \{x : x \in I_n^+, M_n^+(x) < |x - t_{n+1}|^2 P_n^+(x)\}.$$

Положим

$$\mathcal{A}_n^\pm = \{M_n^\pm(x) : x \in \mathcal{R}_M^\pm, x \in I_n\}, \qquad \mathcal{B}_n^\pm = \{P_n^\pm(\lambda) : x \in \mathcal{R}_P^\pm, x \in I_n\}.$$

Отметим, что для каждого n множества $\mathcal{A}_n^\pm$, $\mathcal{B}_n^\pm$ конечны.

Теорема 1.3 *В пространстве $\mathcal{H}(E)$ все вещественные последовательности Λ имеют конечную верхнюю плотность* $\mathrm{UD}(\Lambda)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sup_n \mathcal{D}(\mathcal{A}_n^-) < \infty \qquad \sup_n \mathcal{D}(\mathcal{A}_n^+) < \infty, \quad \sup_n \mathcal{D}(\mathcal{B}_n^-) < \infty \qquad \sup_n \mathcal{D}(\mathcal{B}_n^+) < \infty, \qquad (4)$$

где последовательности $\mathcal{A}_n^\pm$, $\mathcal{B}_n^\pm$ построены по спектральной мере μ.

В случае, если функция E однокомпонентна или $\sup_n \frac{t_{n+1}}{t_n} > 1$, последовательности $\mathcal{A}_n^{\pm}$ равномерно конечны, $\sup_n \#\mathcal{A}_n^{\pm} < \infty$. Следовательно, условие (4) выполнено автоматически.

Следствие 1 *Если спектральная мера $\mu = \sum_n \mu_n \delta_{t_n}$ такова, что $C^{-1}|t_n - t_{n-1}| \le |t_{n+1} - t_n| \le C|t_n - t_{n-1}|$, то любая бесселева последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность $\mathrm{UD}(\Lambda)$.*

При помощи теоремы 1.3 легко проверить существование бесселевой последовательности с бесконечной верхней плотностью.

Положим $\mu = \sum_{k=2}^{\infty} \nu_k$, $\nu_k = \sum_{l=0}^{k} \delta_{2^k+l}$. Легко проверить, что диадический размер последовательности $\mathcal{A}^+_{m(k)}$, соответствующей точке 2^k, - величина порядка $\log k$. Этот контрпример взят из работы [6].

В заключение отметим, что описание спектральных мер μ (или функций E) таких, что любая последовательность Λ с конечной верхней плотностью $\mathrm{UD}(\Lambda)$ бесселева – открытый вопрос. Можно проверить, что если функция E однокомпонентна, то это свойство выполнено. С другой стороны, нетрудно построить пример неоднокомпонентной функции E с тем же свойством (например, пространство, построенное по мере $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n \delta_{2^{2^n}}$, см. [6, Теорема 3.1]).

Условия (4) не достаточны. Например, если $\mu = \sum_{n>0} \delta_{2^n}$, то последовательность $\{3 \cdot 2^n\}$ небесселева, см. [6, Теорема 3.1] или [1, Пример 5.2].

Организация статьи. В §2 мы напомним построение пространств дискретных преобразований Гильберта $\mathcal{H}(T,\mu)$ и переформулируем нашу задачу в новых терминах. В §3 мы докажем теорему 1.3.

Обозначения. Мы будем писать $U(x) \lesssim V(x)$ (или $V(x) \gtrsim U(x)$), если существует константа C такая, что $U(x) \le CV(x)$ для всех, нужных нам x. Если одновременно $U \lesssim V$ и $V \lesssim U$, то мы пишем $U \asymp V$. Величина $\#Y$ обозначает количество элементов в множестве Y.

2 Пространства дискретных преобразований Гильберта $\mathcal{H}(T,\mu)$

Пространства де Бранжа допускают аксиоматическое описание. Пусть нетривиальное гильбертово пространство целых функций $\mathcal{H}$ удовлетворяет трем аксиомам:

1. Если $F \in \mathcal{H}$ и $F(w) = 0$, то функция $F\frac{z-\bar{w}}{z-w}$ принадлежит $\mathcal{H}$ и имеет ту же норму, что и F.

2. Для любого $w \in \mathbb{C}$ линейный функционал $F \mapsto F(w)$ непрерывен.

3. Если $F \in \mathcal{H}$, то функция F^* принадлежит $\mathcal{H}$ и имеет ту же норму, что и F.

Тогда $\mathcal{H} = S\,\mathcal{H}(E)$ для некоторой функции E из класса Эрмита-Билера и целой функции S, $S^* = S$, см. [7, Теорема 23].

Существует еще один взгляд на пространства де Бранжа, впервые появившийся в работе [6]. Пусть $\mu = \sum_n \mu_n \delta_{t_n}$ - дискретная мера на $\mathbb{R}$ такая, что $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{1+t^2} < \infty$ и $|t_n| \to \infty$ при $|n| \to \infty$. Рассмотрим пространство дискретных преобразований Гильберта

$$\mathcal{H}(T,\mu) := \left\{ f : f(z) = \sum_n \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n}, \quad a = \{a_n\} \in \ell^2 \right\},$$

снабженное нормой $\|f\|^2_{\mathcal{H}(T,\mu)} = \sum_n |a_n|^2$. Нетрудно проверить, что пространство $\mathcal{H}(T,\mu)$ удовлетворяет аксиомам 1-3 (если $w \in \mathbb{C} \setminus T$). Пусть A - некоторая целая функция с простыми нулями в $T = \{t_n\}$ и вещественная на вещественной оси. Тогда $A\mathcal{H}(T,\mu)$ - пространство *целых функций*, удовлетворяющее аксиомам 1-3, и, следовательно, $A\mathcal{H}(T,\mu)$ - это пространство де Бранжа.

С другой стороны, верно и обратное: любое пространство де Бранжа может быть представлено в таком виде (см. [6]). Отметим, что μ - это мера Кларка (спектральная мера) соответствующего пространства $\mathcal{H}(E)$.

Такой подход к пространствам де Бранжа позволил лучше понять их структуру и решить некоторые открытые вопросы [6, 2, 3, 4]. Воспроизводящее ядро в пространстве $\mathcal{H}(T,\mu)$ задается формулой

$$k_w(z) = \sum_n \frac{\mu_n}{(\bar{w} - t_n)(z - t_n)}.$$

В частности,

$$\|k_w\|^2_{\mathcal{H}(T,\mu)} = k_w(w) = \sum_n \frac{\mu_n}{|w - t_n|^2}. \tag{5}$$

Таким образом, достаточно проверить теорему 1.3 в пространствах $\mathcal{H}(T,\mu)$. Неравенство бесселя (1) превращается в *весовую оценку преобразования Гильбера* (с весом $\|k_\lambda\|^2$).

Найти необходимые и достаточные условия для ограниченности двухвесового преобразования гильберта - знаменитая задача, остававшаяся открытой несколько десятилетий. Полное решение было получено недавно М. Лэйси, Э. Сойером, К. Шеном и И. Уарто-Туэро, см. [10, 11]. Тем не менее, проверка полученных в работе [10] необходимых и достаточных условий не всегда проста. В данной работе нас интересует случай *специального веса* $\sum_\lambda \|k_\lambda\|^{-2}_{\mathcal{H}(T,\mu)} \delta_\lambda$, работать с которым проще. Наше доказательство теоремы 1.3 не использует методов работы [10].

В дальнейшем мы предполагаем, что все вычисления происходят в пространстве $\mathcal{H}(T,\mu)$. Поэтому мы опускаем индексы в знаке нормы и т.д.

3 Доказательство теоремы 1.3

Нам понадобится оценка на $\|k_\lambda\|$ в терминах величин $M_n^{\pm}(\lambda)$, $P_n^{\pm}(\lambda)$.

Лемма 1 *Пусть* $\lambda \in I_n^-$, *тогда* $\|k_\lambda\|^2 \asymp \max(M_n^-(\lambda)|\lambda - t_n|^{-2}, P_n^-(\lambda))$. *Если* $\lambda \in I_n^+$, *то* $\|k_\lambda\|^2 \asymp \max(M_n^+(\lambda)|\lambda - t_{n+1}|^2, P_n^+(\lambda))$.

Доказательство. Из тождества (5) следует, что

$$\|k_\lambda\|^2 = \sum_n \frac{\mu_n}{|\lambda - t_n|^2} \asymp M_n^-(\lambda)|\lambda - t_n|^{-2} + P_n^-(\lambda).$$

Второе утверждение доказывается аналогично. □

3.1 Достаточность условий (4)

Докажем, что не существует бесселевой последовательности Λ с бесконечной верхней плотностью $\mathrm{UD}(\Lambda) = \infty$. Пусть Λ - такая последовательность. Тогда верхняя плотность одной из четырех последовательностей $\Lambda^{\pm}_{M \text{ или } P}$ бесконечна. Мы рассмотрим случаи $\mathrm{UD}(\Lambda_M^-) = \infty$ и $\mathrm{UD}(\Lambda_P^-) = \infty$. Доказательство для двух оставшихся случаев аналогично.

1. Пусть $\mathrm{UD}(\Lambda_M^-) = \infty$. Последовательность $\mathcal{A}_n^-$ имеет конечный диадический размер, равномерно ограниченный по n. Следовательно, существует подмножество $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda_M^-$ такое, что

$$\mathrm{UD}(\tilde{\Lambda}) = \infty, \qquad M_n^-(\lambda_1) \asymp M_n^-(\lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \tilde{\Lambda} \cap I_n.$$

Для каждого n положим $\lambda_{min}^n = min(\tilde{\Lambda} \cap I_n)$, $\lambda_{max}^n = max(\tilde{\Lambda} \cap I_n)$, $m_n = min\{s : t_n - t_s \le \lambda_{min} - t_n\}$.

Рассмотрим функции g_n,

$$g_n(z) = \sum_{m_n \le k \le n} \frac{\mu_k}{z - t_k}.$$

Легко видеть, что

$$\|g_n\|^2 = M_n^-(\lambda_{min}).$$

С другой стороны, если $\lambda \in \tilde{\Lambda} \cap I_n$, то $|g_n(\lambda)|^2 \gtrsim \frac{M_n^-(\lambda_{min})}{|\lambda - t_n|^2}$. Воспользовавшись леммой 1, получаем

$$\|k_\lambda\|^2 \asymp \frac{M_n^-(\lambda)}{|\lambda - t_n|^2}.$$

Таким образом,

$$\sum_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_n} \frac{|g_n(\lambda)|^2}{\|k_\lambda\|^2} \gtrsim \#\tilde{\Lambda}_n \cdot \frac{[M_n^-(\lambda_{min})]^2}{M_n^-(\lambda_{max})} \gtrsim \#\tilde{\Lambda}_n \cdot M_n^-(\lambda_{min}).$$

Применяя неравенство бесселя к функциям g_n, получаем противоречие.

2. Пусть $\mathrm{UD}(\Lambda_P^-) = \infty$. Последовательность $\mathcal{B}_n^-$ имеет конечный диадический размер, равномерно ограниченный по n. Следовательно, существует подмножество $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda_P^-$ такое, что

$$\mathrm{UD}(\tilde{\Lambda}) = \infty, \qquad P_n^-(\lambda_1) \asymp P_n^-(\lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \tilde{\Lambda} \cap I_n.$$

Для каждого n положим $\lambda_{min}^n = min(\tilde{\Lambda} \cap I_n)$, $\lambda_{max}^n = max(\tilde{\Lambda} \cap I_n)$, $m_n = max\{s : t_n - t_s > \lambda_{max} - t_n\}$. Положим,

$$v_n(z) = \sum_{k \notin (m_n, n]} \frac{\mu_k}{(t_n - t_k)(z - t_k)}.$$

Легко видеть, что

$$\|v_n\|^2 = P_n^-(\lambda_{max}).$$

С другой стороны, если $\lambda \in \tilde{\Lambda} \cap I_n$, то $|v_n(\lambda)| \gtrsim P_n^-(\lambda)$ и

$$\|k_\lambda\|^2 \asymp P_n^-(\lambda).$$

Таким образом,

$$\sum_{\lambda \in \tilde{\Lambda}_n} \frac{|v_n(\lambda)|^2}{\|k_\lambda\|^2} \gtrsim \#\tilde{\Lambda}_n \cdot \frac{[P_n^-(\lambda_{max})]^2}{P_n^-(\lambda_{min})} \gtrsim \#\tilde{\Lambda}_n \cdot P_n^-(\lambda_{max}).$$

Применяя неравенство бесселя к функциям v_n, получаем противоречие.

3.2 Необходимость условий (4)

Докажем, что если хоть одно из условий (4) не выполнено, то существует бесселева последовательность с бесконечной верхней плотностью.

Пусть $\sup_n \mathcal{D}(\mathcal{A}_n^-) = \infty$. Тогда существуют последовательности $\Lambda_n = \{\lambda_1^{(n)}, ..., \lambda_{k_n}^{(n)}\} \subset \mathcal{R}_M^- \cap I_n$ (возможно, Λ_n определены не для всех индексов n) такие, что

$$k_n \to \infty, \quad M_n^-(\lambda_{l+1}^{(n)}) \geq 2M_n^-(\lambda_l^{(n)}), \quad 0 < l < k_n. \tag{6}$$

Дополнительно потребуем, чтобы $2t_k - t_l \notin \Lambda_n$ ни при каких k, l, n. Докажем, что последовательность $\cup_{n \in \mathcal{I}} \Lambda_n$ бесселева для достаточно редкой последовательности индексов $\mathcal{I}$. Для это достаточно проверить, что последовательности Λ_n *равномерно бесселевы* (константа C в неравенстве (1) не зависит от n).

Пусть $f \in \mathcal{H}(T, \mu)$. Это значит, что $f(z) = \sum_l \frac{a_l \mu_l^{1/2}}{z - t_l}$, $\|f\|^2 = \sum_l |a_l|^2$. Проверим неравенство бесселя для f и последовательности Λ_n. Вначале оценим величину $|f(\lambda_s)|^2 \|k_{\lambda_s}\|^{-2}$, $1 \leq s \leq k_n$

$$\frac{|f(\lambda_s)|^2}{\|k_{\lambda_s}\|^2} \lesssim \Big[\sum_{l:|t_n - t_l| \leq \lambda_s - t_n} |a_l| \mu_l^{1/2}\Big]^2 \frac{1}{M_n^-(\lambda_s)} + \Big[\sum_{l:|t_n - t_l| > \lambda_s - t_n} |a_l| \frac{\mu_l^{1/2}}{|t_n - t_l|}\Big]^2 \frac{|\lambda_s - t_n|^2}{M_n^-(\lambda_s)}.$$

Нам осталось доказать, что

$$\sum_{s=1}^{k_n-1}\frac{1}{M_n^-(\lambda_s)}\Bigg[\sum_{l:|t_n-t_l|\le\lambda_s-t_n}|a_l|\mu_l^{1/2}\Bigg]^2\lesssim\sum_n|a_n|^2 \tag{7}$$

и

$$\sum_{s=1}^{k_n-1}\frac{|\lambda_s-t_n|^2}{M_n^-(\lambda_s)}\Bigg[\sum_{l:|t_n-t_l|>\lambda_s-t_n}|a_l|\frac{\mu_l^{1/2}}{|t_n-t_l|}\Bigg]^2\lesssim\sum_n|a_n|^2. \tag{8}$$

Докажем неравенство (7) при помощи двойственности

$$\sum_{s=1}^{k_n-1}\frac{1}{M_n^-(\lambda_s)}\Bigg[\sum_{l:|t_n-t_l|\le\lambda_s-t_n}|a_l|\mu_l^{1/2}\Bigg]^2=\sup_{\|c_s\|_2=1}\sum_{s=1}^{k_n-1}\sum_{l:|t_n-t_l|\le\lambda_s-t_n}a_lc_s[M_n^-(\lambda_s)]^{-1/2}\mu_l^{1/2}.$$

Достаточно доказать, что норма последовательности

$$\tau_l=\mu_l^{1/2}\sum_{s:|t_n-t_l|\le\lambda_s-t_n}c_s[M_n^-(\lambda_s)]^{-1/2}$$

ограничена сверху абсолютной константой. Действительно,

$$|\tau_l|^2\lesssim\mu_l\sum_{s:|t_n-t_l|\le\lambda_s-t_n}|c_s|^2[M_n^-(\lambda_s)]^{-1/2}\cdot\sum_{s:|t_n-t_l|\le\lambda_s-t_n}[M_n^-(\lambda_s)]^{-1/2}.$$

Мы знаем, что

$$\sum_{s:|t_n-t_l|\le\lambda_s-t_n}[M_n^-(\lambda_s)]^{-1/2}\asymp[M_n^-(\lambda_{l^*})]^{-1/2},$$

где l^* - минимальный индекс такой, что $|t_n-t_l|\le\lambda_{l^*}-t_n$. Далее,

$$\sum_l|\tau_l|^2\lesssim\sum_l\sum_{s:|t_n-t_l|\le\lambda_s-t_n}|c_s|^2[M_n^-(\lambda_s)]^{-1/2}\mu_l[M_n^-(\lambda_{l^*})]^{-1/2}=$$

$$=\sum_s|c_s|^2[M_n^-(\lambda_s)]^{-1/2}\sum_{l:|t_n-t_l|\le\lambda_s-t_n}\mu_l[M_n^-(\lambda_{l^*})]^{-1/2}.$$

Заметим, что

$$[M_n^-(\lambda_s)]^{-1/2}\sum_{l:|t_n-t_l|\le\lambda_s-t_n}\mu_l[M_n^-(\lambda_{l^*})]^{-1/2}\le[M_n^-(\lambda_s)]^{-1/2}\int_0^{M_n^-(\lambda_s)}x^{-1/2}dx=2.$$

Неравенство (7) полностью доказано.

Докажем неравенство (8). Вначале докажем, что последовательность $P_n^-(\lambda_s)$ убывает как геометрическая прогрессия

$$P_n^-(\lambda_s)=\sum_{l:\lambda_s-t_n<|t_n-t_l|\le\lambda_{s+1}-t_n}\frac{\mu_l}{|t_n-t_l|^2}+P_n^-(\lambda_{s+1})\ge$$

$$\frac{M_n^-(\lambda_{s+1}) - M_n^-(\lambda_s)}{|t_n - \lambda_{s+1}|^2} + P_n^-(\lambda_{s+1}) \geq \frac{3}{2} P_n^-(\lambda_{s+1}).$$

Заметим, что

$$\sum_{s=1}^{k_n-1} \frac{|\lambda_s - t_n|^2}{M_n^-(\lambda_s)} \Bigg[\sum_{l:|t_n-t_l|>\lambda_s - t_n} |a_l| \frac{\mu_l^{1/2}}{|t_n - t_l|} \Bigg]^2 \leq \sum_{s=1}^{k_n-1} P^-(\lambda_s) \Bigg[\sum_{l:|t_n-t_l|>\lambda_s - t_n} |a_l| \frac{\mu_l^{1/2}}{|t_n - t_l|} \Bigg]^2.$$

Последнюю сумму оценим так же, как в доказательстве неравенства (7).

Оставшиеся случаи $\sup_n \mathcal{D}(\mathcal{B}_n^{\pm}) = \infty$, $\sup_n \mathcal{D}(\mathcal{A}_n^{+}) = \infty$ доказываются аналогично. Теорема 1 полностью доказана.

3.3 Заключительные замечания

Используя методы этой статьи, можно доказать количественный аналог теоремы 1.3.

Теорема 3.1 *Если $\{V_n\}_{n>0}$ - положительная возрастающая последовательность и*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_n^{\pm}) \leq V_n, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{B}_n^{\pm}) \leq V_n,$$

то для любой бесселевой последовательности $\Lambda \subset \mathbb{R}$ верна оценка

$$\#(\Lambda \cap I_n) \lesssim V_n.$$

Следующий результат не вошел в статью [6]. Его можно доказать, действуя так же, как в §2 настоящей статьи или §3 работы [6].

Пусть μ - произвольная мера Кларка пространства $\mathcal{H}(E)$, $\mu = \sum_n \mu_n \delta_{t_n}$. Положим $\tilde{\mu} = \sum_{k\geq 0} v_k \delta_{2^k}$, где $v_0 = \mu([-1,1))$, $v_k = \mu([2^{k-1}, 2^k)) + \mu([-2^{|k|}, 2^{|k|-1}))$, $k > 0$.

Теорема 3.2 *Пусть $\mathcal{H}(E)$ - произвольное пространство де Бранжа со спектральной мерой μ. Тогда последовательность $\Lambda \subset i\mathbb{R}$ бесселева в $\mathcal{H}(E)$ тогда и только тогда, когда она бесселева в пространстве де Бранжа $\mathcal{H}(E_1)$, построенном по спектральной мере $\tilde{\mu}$.*

Отметим, что носитель меры $\tilde{\mu}$ лакунарен, поэтому все бесселевы последовательности в соответствующих пространствах описаны в теореме 3.1 работы [6].

Список литературы

[1] A. D. Baranov, *Stability of bases and frames of reproducing kernels in model subspaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55** (2005), 2399–2422.

[2] A. Baranov, Yu. Belov, *Systems of reproducing kernels and their biorthogonal: completeness or incompleteness?* Int. Math. Res. Notices (2011), **22**, 5076–5108.

[3] A. Baranov, Yu. Belov, A. Borichev, *Hereditary completeness for systems of exponentials and reproducing kernels*, Adv. Math. **235** (2013), 525–554.

[4] A. Baranov, Yu. Belov, A. Borichev, *Spectral synthesis in de Branges spaces*, to appear in Geom. Funct. Anal. (GAFA); http://arxiv.org/abs/1309.6915

[5] Yu. Belov, T. Mengestie, K. Seip, *Unitary discrete Hilbert transforms*, J. Anal. Math. **112** (2010), 383–395.

[6] Yu. Belov, T. Mengestie, K. Seip, *Discrete Hilbert transforms on sparse sequences*, Proc. London Math. Soc. **103** (2011), 3, 73–105.

[7] L. de Branges, *Hilbert Spaces of Entire Functions*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, 1968.

[8] D.N. Clark, *One-dimensional perturbations of restricted shifts*, J. Anal. Math. **25** (1972), 169–191.

[9] W. Cohn, *Carleson measures for functions orthogonal to invariant subspaces*, Pacific J. Math. **103** (1982), 347–364.

[10] M. Lacey, E. Sawyer, C. Shen, I. Uriarte-Tuero, *Two-weight inequality for the Hilbert transform: A real variable characterization, I*, Duke Math. J. **163**, 15 (2014), 2795–2820.

[11] M. Lacey, *Two-weight inequality for the Hilbert transform: A real variable characterization, II*, Duke Math. J. **163**, 15 (2014), 2821–2840.

[12] N. Makarov, A. Poltoratski, *Meromorphic inner functions, Toeplitz kernels and the uncertainty principle*, Perspectives in Analysis, Math. Phys. Stud. 27, Springer, Berlin, 2005, 185–252.

[13] J. Ortega-Cerdà, K. Seip, *Fourier frames*, Ann. Math. **155** (2002), 789–806.

Юрий Белов, Лаборатория им П.Л.Чебышева, С.-Петербургский государственный университет, С.-Петербург, Россия,

E-mail: j_b_juri_belov@mail.ru